БАНКОВСКИЕ РИСКИ: ТЕОРИЯ, ПРАКТИКА, МЕТОДОЛОГИЯ

КАЛИБРОВКА РЕЙТИНГОВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СЕКТОРОВ С НИЗКИМ КОЛИЧЕСТВОМ ДЕФОЛТОВ

В работе представлен метод построения кредитных рейтинговых моделей в условиях недостаточной статистики наблюдаемых дефолтов на примере рейтинговой модели для субъектов РФ. Авторы также описывают процесс калибровки с применением соответствующих формул в явном виде и обосновывают их.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: рейтинговые модели, валидация, бенчмаркинг, недостаточная статистика дефолтов, оптимизация модели, калибровка на вероятность дефолта, рейтинги региональных и местных органов власти

Хамалинский Андрей Сергеевич — заместитель начальника отдела департамента рисков ОАО «Банк ЗЕНИТ» (г. Москва)

Помазанов Михаил Вячеславович — к. ф.-м. н., начальник управления кредитными рисками департамента рисков ОАО «Банк ЗЕНИТ», вице-президент Русского общества управления рисками (РусРиск). Автор более 30 научных работ по оптимальному управлению, финансовой инженерии, опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах. С 2000 г. область интересов тесно связана с финансовыми технологиями (г. Москва)

ВВЕДЕНИЕ

В свете прошедшего кризиса, вызвавшего волну банкротств по всему миру, задача управления рисками в банке становится наиболее актуальной. Кредитный риск является основным видом финансового риска, с которым сталкиваются финансовые институты в процессе своей деятельности. Невозможность для заемщиков в срок и в полном объеме ответить по ранее взятым обязательствам может нарушить финансовую устойчивость банка или даже привести к его банкротству. Для адекватной оценки кредитного риска заемщиков кредиторы используют внутренние рейтинговые модели.

Большинство классических методов построения рейтинговых моделей предполагают наличие богатой статистической базы дефолтов для конкретного отраслево-целевого сегмента. Так, одними из общепризнанных инструментов настройки и оценки качества модели являются кривая Лоренца (ROC-кривая) и логистическая регрессия [1]. Исходя из практического опыта можно сказать, что для действенной настройки рейтинговой системы требуется минимум 100–150 исторических дефолтов на отраслево-целевой сегмент, однако на практике в отдельном банке данное требование зачастую невыполнимо. Более того, период актуальной для модели статистики исторически ограничен качеством макроэкономической среды. Например, нет смысла использовать российскую статистику дефолтов (даже если она имеется) в дорыночный период.

Ввиду этого актуальной является задача корректной валидации и настройки рейтинговой системы в условиях недостаточной статистики дефолтов. В литературе данная проблема носит название low default portfolio, или «портфели с малым количеством дефолтов». Портфели с малым количеством дефолтов включают в себя портфели как с незначительным числом дефолтов, так и с их полным отсутствием.

Портфели с малым количеством дефолтов могут возникать по нескольким причинам, таким как:

- невозможность накопления статистики дефолтов заемщиков, например в случае оценки кредитного рейтинга стран, муниципалитетов, узких отраслево-целевых сегментов;
- отсутствие наблюдаемых дефолтов ввиду низкой вероятности таковых для компаний определенного сектора (например, дефолты крупных публичных компаний листинга ММВБ);
- недостаточность статистической базы банка для конкретного сегмента заемщиков.

Существует ряд работ, посвященных построению рейтинговых моделей в условиях недостатка статистической базы дефолтов. Так, Лоффлер и коллеги в 2006 г. предложили методику, основанную на байесовском подходе, при помощи которой банки могли бы улучшить свои оценки вероятности дефолтов (PD), используя предварительную информацию, полученную из анализа работы кредит-скоринговых моделей на других наборах данных [11]. Модель была протестирована на реальной выборке, в которую вошли нефинансовые организации. В итоге эффективность применения байесовского подхода была незначительно выше, чем в случае использования логистической регрессии.

В своей работе 2004 г. Шуерманн и Хансон [14] приводят метод оценки вероятностей дефолта, использующий матрицы переходов. Вероятности дефолтов для наилучших рейтинговых разрядов определяются на основе информации об их переходах в более низкие рейтинговые разряды, в особенности дефолтные. На базе информации об изменении всех рейтингов в течение года вычисляется интенсивность перехода, которая затем преобразуется в вероятность дефолта. Данный подход хорошо работает в ситуации, когда банк располагает достаточной информацией о дефолтах, хотя бы для определенных рейтинговых разрядов, однако в случае очень малого количества банкротств данный метод имеет трудности в применении.

Другой способ решения проблемы недостатка дефолтов был предложен в работе Сабато [13]. В статье автор исследовал возможность моделирования (не стохастическим способом) достаточного числа дефолтов для дальнейшего построения модели предсказания банкротств классическими способами на базе внутренних данных. Для этого использовалась шоковая модель, которая преобразовывала определенное количество изначально благополучных клиентов (физических лиц) в банкротов путем моделирования некоторых событий, которые предположительно могли привести к дефолту. Проведя тестирование на двух ипотечных и одном потребительском портфелях, автор пришел к выводу, что данная модель превосходит традиционные экспертные модели в точности оценок. Однако было очевидно, что основное ограничение модели связано со стресс-сценариями, которые не являются исчерпывающими.

Итак, в целом можно сделать вывод, что на данный момент не существует общепризнанного подхода к построению и настройке рейтинговых моделей в условиях недостатка статистической базы наблюдаемых дефолтов. В данной статье будет предложена методика оптимальной настройки рейтинговой системы, сочетающая в себе как экспертные оценки, так и статистические методы и техники оптимизации. Представленная авторами методика основана на идее бенчмаркинга и современных разработках в области решения оптимизационных задач.

Стоит отметить, что в связи с трудностями, вызванными недостатком статистической базы исторических дефолтов в некоторых секторах, профессиональным сообществом был поднят вопрос относительно корректной валидации таких внутренних моделей. При этом базельские рекомендации изначально не содержали четких спецификаций для таких портфелей, и многие банки ошибочно полагали, что к этим портфелям неприменим IRB-подход. Однако в 2005 г. Базельский комитет по банковскому надзору (BCBS) выпустил пояснительную записку [3], согласно которой недостаток исторических данных не исключает возможности применения IRB-подхода. При невозможности расширения базы данных за счет альтернативных источников необходимо использовать альтернативные техники для оценки и валидации параметров модели.

Кроме того, в связи с тем что получаемые оценки параметров модели являются менее точными, банку необходимо быть более консервативным в вопросах оценки кредитных рисков. В таких случаях банки чаще всего прибегают к построению моделей на основе экспертных оценок значимости показателей и весов. Применение экспертных моделей не противоречит рекомендациям, однако валидация таких моделей должна проводиться в соответствии со стандартными методиками.

Количественная валидация модели может быть произведена на основе бэк-тестинга или бенчмаркинга. В случае портфеля с малым количеством дефолтов методы на основе бэк-тестинга неприменимы, однако качество модели может быть подтверждено и оптимизировано на основе бенчмаркинга. Базельский комитет определяет понятие «бенчмаркинг» как совокупность методов сравнения внутренних рейтингов с внешними прокси кредитного риска, в качестве которых могут выступать внешние рейтинги, внутренние экспертные рейтинги, заслуживающие доверия, а также рыночные данные: спреды облигаций, данные, полученные из анализа рыночных цен на акции, и кредитные производные.

В литературе в качестве критериев для оценки связи между внутренним рейтингом и внешними прокси кредитного риска часто используют следующие статистические коэффициенты:

- коэффициент ранговой корреляции Спирмена;
- коэффициент D Сомера;
- коэффициент Кендалла.

Тем не менее Эмонд и Месон в своей работе доказали, что данные коэффициенты обладают рядом недостатков, и предложили свой «улучшенный» коэффициент Кендалла *Tx* [7]. Данный коэффициент также использовали в своей работе 2006 г. Хорник и соавторы [10].

ОПИСАНИЕ МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ РЕЙТИНГОВОЙ МОДЕЛИ

Процесс построения рейтинговой модели для заданной отраслево-целевой группы можно разделить на четыре основных этапа:

1) выбор основных риск-доминирующих показателей;
2) анализ выбранных показателей;
3) выбор оптимальных весов показателей;
4) калибровка рейтингового балла на вероятность дефолта.

В результате работы рейтинговой системы вычисляется рейтинговый балл, который затем преобразуется в вероятность дефолта и рейтинговый разряд, эквивалентный международной шкале. Вероятность дефолта служит основным параметром для оценки ожидаемых и непредвиденных потерь и, соответственно, резервов и требований на экономический капитал.

После того как модель была построена, ее качество должно быть подтверждено с помощью методов бенчмаркинга. Первоначальный выбор показателей должен быть максимально полным и учитывать все аспекты деятельности заемщика в экономической отраслевой среде.

Для того чтобы приступить к процессу построения модели, необходимо накопить минимальную статистику по оценке отобранных риск-факторов хотя бы за три-шесть лет. После того как был сформирован список первоначальных показателей, а также накоплена минимальная статистика, следует провести анализ отобранных риск-факторов. Он состоит из нескольких компонент и включает анализ распределения каждого отдельного показателя: среднего, медианы, стандартного отклонения, асимметрии, эксцесса. Затем проводится корреляционный анализ, по результатам которого исключаются зависимые переменные.

При верификации по выборке с наблюдаемыми историческими дефолтами проводится анализ дискриминирующей силы показателя, т.е. его способности разделять заемщиков на «хороших» и «плохих». Обычно данны0ализ проводится при помощи ROC-кривой или статистических тестов на однородность выборки (тесты Вилкоксона, Колмогорова — Смирнова). Однако в случае портфеля с малым количеством дефолтов необходимо использовать альтернативные техники, а именно анализировать дискриминирующую силу показателя относительно бенчмарка. Здесь имеется в виду способность показателя ранжировать заемщиков в том же порядке, в котором это делает бенчмарк.

Такой анализ можно провести с помощью критерия Кендалла, предварительно определив границы принятия решений по показателям. Данная процедура позволяет свести оценки показателей к единой безразмерной шкале и обеспечивает максимально эффективное разделение заемщиков на «хороших» и «плохих». Ввиду недостаточной верификационной базы дефолтов шкалы принятия решений выбираются априорно из расчета равномерного распределения наблюдений по интервалам, т.е. значение показателя разбивается на какое-то количество категорий (интервалов), в каждую из которых попадает примерно одинаковое количество наблюдений. При этом каждому интервалу присваивается определенный вес. Важно отметить, что в случае недостаточной статистики дефолтов при формировании границ принятия решений делается экспертное предположение о монотонности показателя относительно вероятности дефолта.

На основании отобранных показателей формируется рейтинговый балл:

$$Рейтинговый\_балл = \sum Wi \times Ri, \qquad (1)$$

где Wi — вес i-го показателя в итоговом балле;
Ri — оценка в баллах i-той показателя;
при этом $\sum Wi = 100\%$.

Как видно из формулы (1), каждый показатель входит в рейтинговый балл с некоторым весом. Процесс оптимизации рейтинговой системы представляет собой подбор весов показателей, при которых достигается максимальная степень близости внутренних рейтингов и внешних прокси кредитного риска. В качестве прокси кредитного риска имеет смысл использовать рейтинги «большой тройки» международных рейтинговых агентств: Standard & Poor’s, Moody’s либо Fitch, рыночные данные спредов облигаций, модели Distance to Default KMV [6], оценки доверенных экспертов.

Для проведения бенчмаркинга на основе внешних кредитных рейтингов необходимо определить критерий, который будет описывать тесноту связи между внутренними и внешними рейтингами. В качестве такого критерия может быть использован улучшенный коэффициент Кендалла, а в некоторых случаях и коэффициент Коэна.

УЛУЧШЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КЕНДАЛЛА

Коэффициент Кендалла определяет степень относительной упорядоченности двух ранговых величин. Важной особенностью является то, что он работает даже в том случае, когда две ранговые величины имеют разную шкалу измерения.

Для расчета коэффициента Кендалла строятся две матрицы размером nxn (n — количество заемщиков, имеющих одновременно внутренний и внешний рейтинг). Первая матрица строится для значений внутреннего рейтинга, элементы которой a_{ij} определяются по правилу: $a_{ij} = 1$, если внутренний рейтинг субъекта i больше внутреннего рейтинга субъекта j или равен ему; $a_{ij} = -1$, если внутренний рейтинг субъекта i меньше рейтинга субъекта j; $a_{ij} = 0$ для всех диагональных элементов матрицы.

Аналогичным образом строится матрица для внешнего рейтинга, элементы которого обозначаются b_{ij} и вычисляются по тому же правилу, что и a_{ij}, после чего рассчитывается показатель

$$Tx = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times b_{ij}}{n(n-1)}.$$

Коэффициент Кендалла принимает значения от –1 до +1. Максимальная теснота связи (когда обе рейтинговые системы упорядочивают заемщиков в одинаковой последовательности) достигается при $Tx = 1$.

КОЭФФИЦИЕНТ КОЭНА

Коэффициент Коэна измеряет другую сущность понятия тесноты связи, а именно степень согласованности двух ранговых величин. Для расчета коэффициента Коэна строится матрица сопряженности C, каждый элемент c_{ij} которой вычисляется как количество случаев, когда первая рейтинговая система (первый банк) отнесла заемщика в категорию i, а вторая (второй банк) этого же заемщика — в категорию j. Так, диагональные элементы представляют собой количество одинаково оцененных заемщиков, а недиагональные характеризуют расхождение в оценках на $|i - j|$ категорий. Далее элементы матрицы преобразуются к виду $p_{ij} = c_{ij} / N$, где N — общее количество заемщиков, оцененных обоими банками. Доля заемщиков, отнесенных в класс i первым банком: $p_{i.} = \sum_j p_{ij}$, в класс j вторым: $p_{.j} = \sum_i p_{ij}$. Непосредственно коэффициент Коэна k рассчитывается по формуле:

$$k = \frac{Po - Pe}{1 - Pe},$$

где $Po = \sum_{j=1}^{R}\sum_{i=1}^{R} w_{ij} p_{ij}$, $Pe = \sum_{j=1}^{R}\sum_{i=1}^{R} w_{ij} p_{i.} p_{.j}$,

а веса определяются по формуле

$$w_{ij} = 1 - \frac{(i-j)^2}{R-1},$$

в которой R — количество рейтинговых разрядов. Максимальная степень согласованности рейтингов достигается при значении коэффициента, равном 1. При нулевом значении согласованность полностью отсутствует. Существенным ограничением является то, что данный критерий может применяться лишь в том случае, если ранговые величины имеют одинаковую шкалу измерения.

К преимуществам данного коэффициента следует отнести то, что с его помощью можно уловить сдвиги, т.е. систематическую погрешность, в абсолютных значениях рейтингов сравниваемых систем и таким образом оценить качество калибровки рейтинговой модели.

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РЕЙТИНГОВОЙ МОДЕЛИ

Итак, оптимальный выбор весов показателей основан на задаче максимального приближения внутренних рейтингов к внешним прокси кредитного риска. Поскольку задача оптимизации рейтинговой системы ставится для существенно негладких и многомерных функций, для ее реализации рекомендуется использовать современные методы нахождения оптимальных решений в условиях многоэкстремальности. К числу таких методов можно отнести метод генетических алгоритмов.

Генетические алгоритмы — это стохастические методы оптимизации, способные решать задачи в сложных многомерных пространствах, основанные на принципах эволюции и генетики [9].

Классическими методами решения подобных оптимизационных задач являются методы градиентного спуска и метод случайного поиска. В общих чертах работу метода градиентного спуска можно представить в следующем виде: вначале случайным образом выбирают некоторые значения параметров, затем эти значения постепенно изменяют в соответствии с градиентом целевой функции, достигая таким образом наибольшей скорости роста целевой функции.

Метод случайного поиска наиболее прост и представляет собой последовательное вычисление значений целевой функции во всех возможных точках и запоминание максимального из найденных. Однако по отношению к генетическому алгоритму у этих методов есть существенные недостатки. Метод градиентного спуска не позволяет находить глобальный максимум, т.е. плохо работает в условиях многоэкстремальности, а метод случайного поиска неоптимален по количеству вычислений, особенно в многомерных задачах.

Важной особенностью генетических алгоритмов является возможность находить глобальный экстремум, а также работать с любыми функциями. В данных алгоритмах никак не используются такие свойства функции, как непрерывность или дифференцируемость. Подобная универсальность позволяет использовать сложные критерии оптимальности, по которым может осуществляться много различных преобразований исходных данных.

Работу классического генетического алгоритма можно представить как итерационный процесс, на первом шаге которого случайным образом создается множество векторов-решений (начальная популяция), после чего они оцениваются с помощью целевой функции. В результате для каждого решения вычисляется значение («приспособленность»), которое определяет, насколько хорошо данный вектор решает поставленную задачу. Из полученного множества решений («поколения») при помощи оператора селекции[1] отбираются лучшие (с точки зрения целевого функционала), затем к ним применяются генетические операторы («скрещивание» и «мутация»). В результате этого получается новое множество решений, среднее значение целевой функции в котором не ниже, чем в предыдущем поколении. Данный набор действий повторяется в течение нескольких циклов, пока не будет выполнен один из критериев остановки алгоритма. Такими критериями могут быть:

- нахождение глобального экстремума;
- исчерпание числа итераций, отпущенных на работу алгоритма.

Таким образом, задача оптимизации представляет собой максимизацию целевого функционала — коэффициента Кендалла (или коэффициента Коэна) путем изменения весов показателей с учетом ограничений на эти показатели. При помощи генетического алгоритма можно также судить о значимости показателей. Так, в случае когда показатель является незначимым, генетический алгоритм присваивает ему нулевой вес и увеличивает веса показателей, значимо влияющих на оптимизацию рейтинга.

Однако следует учитывать, что генетический алгоритм является всего лишь математическим инструментом, и при принятии решения о наилучшем выборе весов нельзя забывать об экономической целесообразности такого выбора. Так, для первого приближения можно использовать экспертные веса, задавая их в качестве части элементов начальной популяции и вводя ограничения на величину отклонения оптимальных весов от заданных изначально.

КАЛИБРОВКА РЕЙТИНГОВОГО БАЛЛА НА ВЕРОЯТНОСТЬ ДЕФОЛТА

Последним этапом построения рейтинговой модели служит калибровка рейтингового балла. Наиболее обоснованная с практической точки зрения зависимость между рейтинговым баллом заемщика и его среднегодовой ожидаемой частотой дефолтов (PD) задается двухпараметрической логит-функцией следующего вида:

---

[1] Вероятностный отбор решений с наибольшим значением функции приспособленности. — *Здесь и далее прим. авт.*

$$PD = \frac{1}{1 + e^{A \times R + B}}, \qquad (2)$$

где R — рейтинговый балл кредитоспособности заемщика;
A — коэффициент наклона;
B — коэффициент фона.

Коэффициент A определяет нелинейный наклон зависимости PD от рейтингового балла и характеризует качество внутренней рейтинговой системы в плане разделения на «хороших» и «плохих» заемщиков. Коэффициент B — параметр, отвечающий за настройку модели на среднеожидаемую частоту дефолтов в заданном отраслевом секторе. Калибровка системы представляет собой поиск наиболее адекватных параметров A и B (2).

После калибровки рейтингового балла каждому заемщику присваивается рейтинговый разряд исходя из соответствия разряда статистической PD по таблице, публикуемой рейтинговым агентством[2].

Входящими параметрами для калибровки служат:

1) параметры распределения рейтингового балла (средний рейтинговый балл <R> и стандартное отклонение рейтинговых баллов dR в портфеле);

2) ожидаемая среднегодовая частота дефолтов в отраслево-целевом секторе (является основным параметром при калибровке рейтинговой системы и оценивается исходя из статистики рейтинговых агентств, исторических данных, различных аналитических прогнозов);

3) мощность рейтинговой системы в смысле разделения заемщиков на «плохих» и «хороших», определяемая показателем Accuracy Ratio (AR). В задачах с достаточной статистической базой дефолтов этот показатель рассчитывается по ROC-кривой итогового рейтингового балла. В случае портфеля с малым количеством дефолтов показатель оценивается экспертно согласно ожидаемой мощности рейтинговой системы, сопоставимой с известными мощностями аналогичных моделей.

В случае выполнения определенных предпосылок, а именно справедливости предположения о нормальности распределения рейтингового балла, выполнения ограничения на мощность рейтинговой системы (AR не более 0,6), а также на качество портфеля (PD не выше 8–10%) калибровку рейтингового балла можно проводить по явным формулам. При этом нормированные показатели a, b определяются по формулам:

$$a = AR \times \sqrt{\pi} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{\pi}{12} AR^2 \left(1 + 6 \times <PD> \times e^{-\frac{\pi \times AR^2}{2}}\right)\right), \qquad (3)$$
$$b = -\ln <PD> + \frac{a^2}{2} - <PD> \times e^{a^2}.$$

Из формулы (3) видно, что показатели a и b зависят только от экзогенных переменных PD и AR, они не меняются при изменении параметров распределения рейтингового балла (т.е. являются константами для конкретной модели).

Затем на основании полученных значений a и b определяются итоговые параметры рейтинговой модели A и B:

$$A = \frac{a}{dR}, \qquad (4)$$
$$B = b - a \times <R> / dR.$$

Обоснование данных калибровочных формул приведено в Приложении.

В случае когда калибровка рейтингового балла реализуема с помощью явных формул, ее целесообразно проводить вместе с оптимизацией модели. При этом оптимизацию следует перенести с множества рейтинговых баллов на множество соответствующих рейтинговых разрядов, что позволит добиться более точного приближения внутренних рейтингов и сделает возможным

[2] Например, на конец 2010 г. таблица соответствия рейтингового разряда и статистической PD для корпоративных клиентов приведена в отчете S&P 2010 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transition, опубликованном на сайте http://www.standardandpoors.com/ratings/gfir/en/us.

применение коэффициента Коэна в качестве целевого функционала для задачи оптимизации рейтинговой системы, поскольку количество рейтинговых разрядов будет одинаковым для модели и для бенчмарка.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА НА ПРИМЕРЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕЙТИНГОВОЙ МОДЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ ОРГАНОВ ВЛАСТИ РФ

Специфика выбранного отраслево-целевого сектора не позволяет сформировать достаточную статистическую базу для оценки кредитных рисков региональных органов власти РФ традиционными методами на основе фактических данных о дефолтах субъектов РФ (с помощью ROC-кривой). Основная проблема заключается в отсутствии достоверных данных о количестве и качестве банкротств за последние 7–10 лет.

Для построения модели использовались годовые данные из открытых источников об исполнении бюджетов субъектов РФ, данные Госкомстата, Министерства финансов. В качестве бенчмарка для оптимизации модели были выбраны рейтинги Standard & Poor's для субъектов РФ (по международной шкале в национальной валюте). Исследуемый период для обучающей выборки — 2007–2009 гг. Мощность выборки составила 230 наблюдений (данные 83 субъектов РФ за исследуемый период). В качестве контрольной выборки использовались данные о субъектах РФ, имеющих рейтинг S&P до 2010 г. Выборка рейтингов составила 52 наблюдения (рейтинги 16–19 субъектов РФ в период 2007–2009 гг.) для обучающей выборки и 19 наблюдений для контрольной. Выбор такого периода исследования был обусловлен слишком малым числом рейтингов S&P, присвоенных региональным органам власти РФ до 2007 г.

Из первоначального списка в 12 показателей были отобраны 9 наиболее значимых, которые составили основу для расчета рейтингового балла:

1) отношение государственного долга к собственным доходам бюджета;

2) объем собственных доходов бюджета (с поправкой на индекс инфляции);

3) доля собственных доходов в общем объеме доходов;

4) отношение дефицита бюджета к собственным доходам бюджета;

5) доля средств, направляемых в бюджеты других уровней, в расходах;

6) отношение задолженности по налогам к объему налоговых платежей;

7) доля прибыльных предприятий в общем количестве зарегистрированных на территории региона;

8) уровень безработицы;

9) денежные доходы населения в расчете на одного жителя (с поправкой на индекс инфляции).

Оптимизация коэффициентов осуществлялась вместе с калибровкой модели (нахождением *A* и *B* в логистической функции (2)), т.е. к рейтингам S&P приближались не рейтинговые баллы, а уже полученные в процессе калибровки рейтинговые разряды. Выбор параметра мощности системы AR основывался на опыте построения аналогичных моделей (например, у настроенных рейтинговых моделей корпоративных заемщиков этот показатель составляет 40–50%). В качестве параметра AR разумно взять значения в диапазоне 40–50% и проверить, при каком из них достигается максимальное значение целевого функционала.

Ввиду того что коэффициенты Кендалла и Коэна характеризуют разную сущность понятия тесноты связи (упорядоченность и согласие), оптимизация проводилась отдельно по каждому из критериев.

Максимальные коэффициенты Кендалла (0,75) и Коэна (0,89) достигаются при значении *AR*, равном 45% (табл. 1). Таким образом, целесообразно выбрать именно это значение в качестве ожидаемой мощности системы и соответствующие ему параметры калибровки. При оптимизации по коэффициенту Коэна были получены сходные результаты. Так, оптимальные веса для данного критерия лежат рядом с точкой, соответствующей оптимальным весам по критерию Кендалла, т.е. весовые коэффициенты, при которых достигается максимальное значение коэффициента Кендалла, являются субоптимальными и для задачи оптимизации по коэффициенту Коэна.

Показателями, получившими максимальный вес, стали «Объем собственных доходов бюджета» и «Денежные доходы населения». После этого качество модели было протестировано на контрольной выборке (данные 2010 г.), при этом коэффициент Кендалла составил 0,74, а коэффициент Коэна 0,85. Несущественное снижение данных коэффициентов свидетельствует об устойчивости рейтинговой модели.

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕЙТИНГОВОЙ МОДЕЛИ

Качество приближения можно оценить по сравнительной таблице соответствия внутреннего рейтинга / вероятности дефолта и рейтингов S&P за 2010 г. (табл. 2).

В качестве альтернативы коэффициентам Кендалла и Коэна как способам валидации модели можно привести более наглядный метод, используемый ведущими рейтинговыми агентствами. Этот метод представляет собой схему разбиения рейтингов на множества в соответствии с их отклонением от заданного эталона (в данном случае эталоном выступает рейтинг S&P) (табл. 3, 4).

Как видно из табл. 4, ни один внутренний рейтинг не отклоняется от внешнего более чем на два разряда, отклонения на два разряда редки. Более половины внутренних рейтингов в точности совпадают с рейтингами S&P. После верификации и калибровки модели на выборке субъектов, имеющих рейтинг S&P, модель может быть применена к остальным субъектам РФ.

Таблица 1. Результаты оптимизации (*Tx* — коэффициент Кендалла, *k* — Коэна)

AR, %	*Tx*	*k*
50	0,74	0,86
45	0,75	0,89
40	0,73	0,86

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен метод построения кредитных рейтинговых моделей в условиях недостаточной статистики наблюдаемых дефолтов. Реализация была проиллюстрирована примером модели оценки кредитного рейтинга субъектов Российской Федерации.

Предложенный подход основывается на идее бенчмаркинга, а также на разработках в области решения оптимизационных задач — генетических алгоритмах. В результате применения данной методики к модели оценки кредитного риска региональных органов власти РФ удалось достичь высокой степени близости внутренних рейтингов и внешних рейтингов S&P.

Так, полученные высокие значения коэффициентов Кендалла и Коэна свидетельствуют о высокой степени упорядоченности внутренних рейтингов в соответствии с рейтингами S&P (в случае высокой предсказательной силы бенчмарка большое значение коэффициента Кендалла может указывать на высокую дискриминирующую силу модели), а также о корректной калибровке модели (об отсутствии существенных смещений в абсолютных значениях рейтингов двух рейтинговых моделей). Проверка значений данных критериев на обучающей выборке указывает на устойчивость получаемых оценок.

Стоит отметить, что данный результат невозможно обеспечить при «ручной» (экспертной) оценке весов показателей и значимости переменных. Однако нельзя забывать о главной предпосылке, на которой базируется модель: она основывается на предположении о высокой дискриминирующей силе бенчмарка. В случае если это не так, полученная модель не способна дискриминировать «хороших» и «плохих» заемщиков.

Таблица 2. Сравнительная таблица соответствия внутреннего рейтинга / вероятности дефолта и рейтингов S&P

Субъект	Рейтинговый балл	PD: модель, %	Модельный рейтинг	Рейтинг S&P	PD: S&P, %
Москва	89,25	0,37	BBB–	BBB	0,20
Санкт-Петербург	97,75	0,23	BBB	BBB	0,20
Ямало-Ненецкий АО	91	0,33	BBB–	BBB	0,20
Ханты-Мансийский АО	90,25	0,35	BBB–	BBB–	0,30
Республика Башкортостан	73,75	0,86	BB	BB+	0,50
Красноярский край	69,5	1,08	BB	BB+	0,50
Самарская область	81	0,58	BB+	BB+	0,50
Челябинская область	63,5	1,49	BB–	BB+	0,50
Краснодарский край	71	0,99	BB	BB	0,90
Ленинградская область	68	1,17	BB	BB	0,90
Липецкая область	61,75	1,64	BB–	BB	0,90
Свердловская область	80	0,61	BB+	BB	0,90
Волгоградская область	59,25	1,88	BB–	BB–	1,50
Иркутская область	62,5	1,57	BB–	BB–	1,50
Республика Саха (Якутия)	63	1,53	BB–	BB–	1,50
Вологодская область	43	4,45	B	B+	2,50
Ставропольский край	55	2,35	B+	B+	2,50
Тверская область	48,25	3,37	B+	B+	2,50
Томская область	60,75	1,73	BB–	B+	2,50

Таблица 3. Таблица отклонений полученных оценок от эталона (обучающая выборка, данные за 2007–2009 гг.)

Точное совпадение, %	Разница в один разряд и менее, %	Разница в два разряда и менее, %
60	88	100

Таблица 4. Таблица отклонений полученных оценок от эталона (контрольная выборка, данные 2010 г.)

Точное совпадение, %	Разница в один разряд и менее, %	Разница в два разряда и менее, %
53	95	100

В такой ситуации следует поискать иной бенчмарк, лучше отражающий кредитный риск заемщиков в данном отраслево-целевом сегменте.

Таким образом, в данной работе на примере построения рейтинговой модели для региональных органов власти РФ была продемонстрирована возможность применения разработанной методики как одного из способов оптимальной настройки рейтинговой системы для портфеля с малым количеством дефолтов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Помазанов М.В. Продвинутый подход к управлению кредитным риском в банке: методология, практика, рекомендации. — М.: Регламент-Медиа, 2010. — 180 с.
2. Третьяков В. Рейтинг относительной кредитоспособности российских регионов // Рынок ценных бумаг. — 2005. — №3. — С. 53–56.
3. Basel Committee on Banking Supervision (2005). *Validation of Low-Default Portfolios in the Basel II Framework*. Newsletter 6.
4. Benjamin N., Cathcart A., Ryan K. (2006). *Low Default Portfolios: A Proposal for Conservative Estimation of Default Probabilities.* Financial Services Authority, Working Paper.
5. Cheung S. (1996). *Provincial Credit Ratings in Canada: An Ordered Probit Analysis.* Working Paper 96 6, Bank of Canada.
6. Crosbie P., Rohn J. (2003). *Modeling Default Risk.* Modeling Methodology Moody's KMV.
7. Emond E., Mason D. (2002). «A new rank correlation coefficient with application to the consensus ranking problem». *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 11, pp. 17–28.
8. Gaillard N. (2006). *Determinants of Moody's and S&P's Subsovereign Credit Ratings.* World Bank, Washington, DC.
9. Goldberg D. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA. P. 821.
10. Hornik K., Jankowitsch R., Lingo M., Pichler S. and Winkler G. (2006). «Validation of credit rating systems using multi-rater information». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 25, pp. 171–185.
11. Löffler G., Posch P.N., Schoene C. (2004). *Bayesian Methods for Improving Credit Scoring Models.* Working Paper, DefaultRisk.
12. Ricke M., von Pföstl G. (2008). «Quantitative validation of rating models for low default portfolios through benchmarking». *Financial Stability Report*, No. 14, pp. 117–125.
13. Sabato G. (2006). *Managing Credit Risk for Retail Low-Default Portfolio.* Working Paper. Department of Banking, University of Rome «La Sapienza».
14. Schuermann T., Hanson S. (2004). *Estimating Probabilities of Default*. Working Paper. Federal Reserve Bank of New York.

ПРИЛОЖЕНИЕ.
Формулы калибровки рейтингового балла

В произвольной рейтинговой системе логистическая формула зависимости PD от R задается в виде:

$$PD = \frac{1}{1 + e^{AR + B}},$$

где *A* и *B* (параметры «наклона» и «фона») определяются по мощности рейтинговой системы, характеризуемой коэффициентом Gini (который также именуется Accuracy Ratio (AR)), и по ожидаемой вероятности дефолта <PD> для всех входящих заемщиков. Распределение рейтингового балла, характеризующееся средним <R> и стандартным отклонением dR, предполагается близким к нормальному. Нормируя рейтинговый балл R переменной *x* как $R = \langle R \rangle + x \times dR$, предполагаем, что нормированный рейтинговый балл *x* будет иметь стандартное нормальное распределение с нулевым средним и единичным стандартным отклонением *f*(*x*). Тогда $PD(x) = \frac{1}{1 + e^{ax + b}}$,

где *a* и *b* связаны с *A* и *B* по формулам:

$$A = \frac{a}{dR},$$
$$B = b - \frac{a < R >}{dR},$$

при этом $a > 0$ (с ростом рейтинга PD уменьшается), $b >> 0$ (<PD> мало).

Ожидаемая частота дефолтов в диапазоне рейтингового балла (–∞, *x*) обозначается как $EDF_{a,b}(x)$, при этом очевидно условие: $EDF_{a,b}(x \to \infty) = \langle PD \rangle$, а сама зависимость может быть выражена формулой:

$$EDF_{a,b}(x) = EDF(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi)}{1 + e^{a\xi + b}} d\xi, \qquad (1.\ \text{П})$$
$$< PD > = \lim_{x \to \infty} EDF_{a,b}(x),$$

где *f*(ξ) — нормированное распределение заемщиков. В упрощенном случае $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}$ (стандартное нормальное). Стандартная функция ROC-кривой, характеризующая долю дефолтных заемщиков среди всех заемщиков, упорядоченных по возрастанию рейтингового балла, будет определяться на плоскости XY параметрически от X: $Y = EDF(X) / \langle PD \rangle$, $X = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi = N(x)$, т.е. $Y = ROC(X)$.

Тогда по определению коэффициента Gini:

$$AR = \frac{2\int_0^1 ROC(X) dX - 1}{1 - < PD >}, \text{ т.е.} \qquad (2.\ \text{П})$$
$$AR = \frac{\frac{2}{< PD >}\int_{-\infty}^{+\infty} EDF(x) f(x) dx - 1}{1 - < PD >}.$$

Уравнения (1. П) и (2. П) дают замкнутую систему для искомых параметров *a*, *b*, выражаемых через *AR* и <*PD*>, что и является калибровкой. Для нахождения калибровочных связей *a*, *b* через *AR* и <*PD*> в виде конечных формул необходимо сделать ряд асимптотических предположений:

1) $a << 1$, т.е. *AR* невелико;

2) $\langle PD \rangle << 1$, т.е. $\frac{1}{1 + e^{b}} << 1$, или $\lambda = e^{-b} << 1$;

3) распределение рейтингового балла близко к нормальному.

Представим функцию $F(\xi) = \frac{1}{1 + e^{a\xi + b}}$ асимптотически по λ до членов второго порядка

$$F(\xi) = \lambda e^{-a\xi} \frac{1}{1 + \lambda e^{-a\xi}} = \lambda e^{-a\xi}(1 - \lambda e^{-a\xi} + o(\lambda^2)).$$

С учетом преобразования $\int_{-\infty}^{x} f(\xi) e^{-a\xi} d\xi = e^{a^2/2} N(x + a)$, для зависимости *EDF*(*x*) (1. П) получается асимптотика, $EDF(x) = \lambda(e^{a^2/2} N(x + a) - \lambda e^{2a^2} N(x + 2a) + o(\lambda^2))$, $EDF(\infty) = < PD >$, т.е. уравнение (1. П) преобразуется в конечный вид:

ПРИЛОЖЕНИЕ.
Формулы калибровки рейтингового балла (продолжение)

$$\lambda e^{a^2/2} - \lambda^2 e^{2a^2} + o(\lambda^3) = \langle PD \rangle. \qquad (3.\ П)$$

Для оценки интеграла $I = \int_{-\infty}^{+\infty} EDF(x) f(x) dx$, входящего в уравнение (3. П), для AR требуется вычислить $S(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x + a) f(x) dx$:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x) f(x) dx = \frac{N^2(x)}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1/2,$$

$$S'(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) f(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-a^2/4},$$

$$S(a) = S(0) + \int_0^a S'(\xi) d\xi = N(\frac{a}{\sqrt{2}}),$$

$$I = \lambda(e^{a^2/2} N(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \lambda e^{2a^2} N(a\sqrt{2}) + o(\lambda^2)).$$

Если опустить члены более высокого порядка, по λ получается нелинейная система уравнений для a и λ через известные <PD> и AR в виде:

$$\begin{cases} \lambda e^{a^2/2} N(\frac{a}{\sqrt{2}}) - \lambda^2 e^{2a^2} N(a\sqrt{2}) = \\ = \dfrac{\langle PD \rangle}{2}(1 + AR(1 - \langle PD \rangle) \\ \lambda e^{a^2/2} - \lambda^2 e^{2a^2} = \langle PD \rangle \end{cases}. \qquad (4.\ П)$$

Используя асимптотическое представление $N(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} x(e^{-x^2/6} + o(x^4)))$ из первого уравнения системы (4. П), получим

$$AR(1 - \langle PD \rangle)\langle PD \rangle =$$

$$= \frac{a\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{5}{12}a^2} (1 - 2\lambda e^{\frac{5}{4}a^2})$$

с учетом второго слагаемого $\langle PD \rangle =$ $= \lambda e^{a^2/2}(1 - \lambda e^{\frac{3}{2}a^2})$, т.е.:

$$1 - \langle PD \rangle = 1 - \lambda e^{a^2/2} + o(\lambda^2). \qquad (5.\ П)$$

Получаем $AR = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2/12}(1 - \lambda \frac{a^2}{2} + o(\lambda^2))$, т.е. в первом приближении по λ можно представить:

$$AR = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2}{12}(1 + 6\lambda)}. \qquad (6.\ П)$$

Переписывая уравнение (5. П) в виде $\lambda =$ $= \langle PD \rangle e^{-a^2/2} + \lambda^2 e^{3/2a^2}$, получаем $\lambda =$ $= \langle PD \rangle e^{-a^2/2} + (\langle PD \rangle)^2 e^{a^2/2} + o(\langle PD \rangle^3)$ из уравнения (6. П), опуская члены высшего порядка, получим $a = AR\sqrt{\pi} e^{\frac{a^2}{12}(1 + 6\langle PD \rangle e^{-a^2/2})}$, учитывая первый порядок малости по AR и $\lambda = e^{-b}$, получаем окончательно асимптотическую калибровку:

$$a = AR\sqrt{\pi} \exp(\frac{\pi}{12} AR^2 (1 + 6\langle PD \rangle e^{-\frac{\pi AR^2}{2}})),$$

$$b = -\ln\langle PD \rangle + \frac{a^2}{2} - \langle PD \rangle e^{a^2}.$$